УДК 517.929
DOI 10.21685/2072-3040-2019-1-7

*И. В. Бойков*

# ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ. ЧАСТЬ II. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ[1]

**Аннотация.**

*Актуальность и цели*. Работа посвящена анализу устойчивости в смысле Ляпунова установившихся решений систем линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от времени, и с запаздываниям, зависящими от времени и от дифференцируемой функции в левой части уравнения. Рассматриваются случаи непрерывного и импульсного возмущений.

*Материалы и методы.* Исследование устойчивости основано на применении метода «замораживания» коэффициентов, зависящих от времени, и последующем анализе устойчивости решения системы в окрестности точки «замораживания». При анализе преобразованных таким образом систем дифференциальных уравнений используются свойства логарифмических норм.

*Результаты*. Предложен алгоритм, позволяющий получать достаточные критерии устойчивости решений конечных систем линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами и с запаздываниями, зависящими от времени и от дифференцируемой функции в левой части уравнения. Достаточные условия получены в евклидовой метрике. Алгоритмы эффективны как в случае непрерывных, так и в случае импульсных возмущений.

*Выводы*. Предложенный метод может быть использован при исследовании нестационарных динамических систем, описываемых системами обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с запаздываниями, зависящими от времени и от дифференцируемой функции в левой части уравнения.

**Ключевые слова**: устойчивость, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, запаздывания, зависящие от времени и от дифференцируемой функции в левой части уравнения, евклидова метрика.

*I. V. Boykov*

# SUFFICIENT CONDITIONS OF SYSTEM SOLUTIONS STABILITY OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TIME-DELAYED SYSTEMS. PART II. LINEAR EQUATIONS

**Abstract.**

*Background.* The work is devoted to the analysis of stability in the sense of Lyapunov of steady-state solutions of systems of linear differential equations with time-dependent coefficients and with time-dependent delays and a differentiated function on the left side of the equation. The cases of continuous and pulsed perturbations are considered.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-00594.

*Materials and methods.* The stability study is based on the application of the method of "freezing" of time-dependent coefficients and the subsequent analysis of the stability of the solution of the system in the vicinity of the "freezing" point. In the analysis of systems of differential equations thus transformed, the properties of logarithmic norms are used.

*Results.* An algorithm is proposed that allows one to obtain sufficient criteria for the stability of solutions of finite systems of linear differential equations with coefficients and delays that depend on time and on a differentiable function on the left side of the equation. Sufficient conditions are obtained in the Euclidean metric. Algorithms are effective both in the case of continuous and in the case of impulsive perturbations.

*Conclusions.* The proposed method can be used in the study of nonstationary dynamic systems described by systems of ordinary linear differential equations with delays that depend on time and on a differentiable function on the left side of the equation.

**Keywords**: stability, systems of ordinary differential equations, delays that depend on time and on a differentiated function on the left side of the equation, Euclidean metric.

## Введение

Данная работа является продолжением статьи [1], в которой были получены достаточные условия устойчивости решений систем уравнений вида

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)x_j(t-h(t)),\ i = 1,2,...,n, \tag{1}$$

где $b_{ij}(t),\ i, j = 1,2,...,n,$ – непрерывные функции; $h(t)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая следующему условию:

$$0 \le h(t) \le H^* + t \text{ при } 0 \le t < \infty.$$

Достаточные условия устойчивости решений систем уравнений вида (1) получены для произвольного $n$-мерного пространства $R_n$ и выражены через коэффициенты при неизвестных в правой части системы. Отметим, что система уравнений (1) является частным случаем системы

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k\left(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t - h_{k1}(t)), \ldots, x_n(t - h_{kn}(t))\right), \tag{2}$$

$$k = 1,2,\ldots,n,\ \ t \ge t_0.$$

В работе [2] в метрике пространства $R_n^3$ векторов $x = (x_1,\ldots,x_n)$ с нормой $\| x \|_3 = \max\limits_{1\le k\le n} | x_k |$ получены достаточные условия устойчивости решений систем нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2) с запаздываниями, зависящими от времени, и с начальным множеством $\varphi(t) = (\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))$, $t_0 - H \le t \le t_0$, где $x(t) = \varphi(t)$ при $t_0 - H \le t \le t_0$, $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$, $\varphi(t) = (\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))$ – непрерывная вектор-функция. Подобное решение обозначим через $x_\varphi(t)$.

Достаточные условия устойчивости были выражены через логарифмические нормы множества матриц, построенных на вектор-функциях

$$F\left(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1\left(t-h_{k1}(t), \ldots, x_n(t-h_{nn}(t))\right)\right)$$

с элементами

$$\left(f_k(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t-h_{k1}(t), \ldots, x_n(t-h_{kn}(t))\right),\ k=1, \ldots, n.$$

Соответствующие логарифмические нормы были ассоциированы с метрикой пространства $R_n^3$. Логарифмическая норма матрицы $A=\{a_{ij}\}$, $i, j=1,2, \ldots, n,$ в пространстве $R_n^3$ с нормой $\|x\|_3=\max\limits_{1 \le k \le n}|x_k|$ определяется в [3, 4] формулой $\Lambda(A)=\max\limits_i\left(a_{ii}+\sum\limits_{j=1, j \ne i}^n |a_{ij}|\right)$.

При получении достаточных условий устойчивости решений систем уравнений вида (2) в работе [2] существенно использовались свойства упомянутой выше метрики пространства $R_n^3$.

Представляет значительный интерес получение достаточных условий устойчивости решений систем уравнений вида (2), справедливых в любых $n$-мерных пространствах, на основе методологии, свободной от использования свойств метрики конкретного пространства.

Ниже исследуются вопросы устойчивости в эвклидовой метрике решений систем уравнений следующего вида:

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t)+\sum_{j=1}^n b_{ij}(t)x_j(t-h_i(t)),\ i=1,2,...,n, \tag{3}$$

$k=1,2, \ldots, n,$ $t \ge t_0,$ с начальным множеством $\varphi(t)=(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)),$ $t_0-H \le t \le t_0,$ где $x(t)=\varphi(t)$ при $t_0-H \le t \le t_0,$ $x(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t)),$ $\varphi(t)=(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))-$ непрерывная вектор-функция.

Здесь и ниже полагаем $t_0=0$.

Напомним определения устойчивости и асимптотической устойчивости.

**Определение 1.** Решение $x_\varphi(t)$ системы уравнений (3) называется устойчивым, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0,$ что из неравенства $|\varphi(t)-\psi(t)|<\delta(\varepsilon)$ на начальном множестве следует $|x_\varphi(t)-x_\psi(t)|<\varepsilon$ при $t \ge t_0$, где $\psi(t)$ – непрерывная начальная вектор-функция.

**Определение 2.** Устойчивое решение $x_\varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если $\lim\limits_{t \to \infty}|x_\varphi(t)-x_\psi(t)|=0$ для любой непрерывной начальной функции $\psi(t)$, удовлетворяющей при достаточно малом $\delta_1>0$ условию $|\varphi(t)-\psi(t)|<\delta_1$.

Наряду с этими определениями имеет смысл рассмотреть случай, когда возмущение носит импульсный характер. В этом случае можно определить функцию $\psi(t)$ следующим образом: $\psi(t) = \varphi(t)$ при $t_0 - H \le t < t_0$, $\psi(t_0) = \varphi(t_0) + \delta.$ При этом определения устойчивости и асимптотической устойчивости остаются прежними.

Приведем определения, используемые в статье.

Пусть $X$ – банахово пространство; $K-$ оператор, действующий из $X$ в $X$; $B(a,r) = \{x, a \in X : \| x - a \| \le r\}$; $S(a,r) = \{x, a \in X : \| x - a \| = r\}$; $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма линейного оператора $K$, определяемая [3, 4] выражением $\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0}(\| I + hK \| - 1) / h,$ где символ $h \downarrow 0$ означает, что $h$ стремится к нулю, убывая.

Для матриц в часто используемых пространствах логарифмические нормы известны.

Пусть дана вещественная матрица $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n,$ в $n$-мерном пространстве $R_n^j$, $j = 1, 2, 3,$ векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ соответственно с нормой

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} | x_k |, \ \|x\|_2 = \left[ \sum_{k=1}^{n} | x_k |^2 \right]^{1/2}, \ \|x\|_3 = \max_{1 \le k \le n} | x_k |.$$

Логарифмическая норма матрицы $A$ равна [3, 4]:

$$\Lambda_1(A) = \max_j \left( a_{jj} + \sum_{i=1, i \ne j}^{n} | a_{ij} | \right), \quad \Lambda_2(A) = \lambda_{\max} \left( \frac{A + A^T}{2} \right),$$

$$\Lambda_3(A) = \max_i \left( a_{ii} + \sum_{j=1, j \ne i}^{n} | a_{ij} | \right).$$

Здесь $\lambda_{\max}\left((A + A^T)/2\right)$ – наибольшее собственное значение матрицы $(A + A^T)/2.$

## 1. Линейные уравнения. Импульсное возмущение

Рассмотрим систему линейных неавтономных уравнений с запаздываниями:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) x_j(t - h_i(t)), \ i = 1, 2, ..., n, \tag{4}$$

где $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, ..., n,$ $h_j(t)$, $j = 1, 2, ..., n,$ – непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$0 \le h_* \le h_j \le h_j(t) \le H_j \le H^*, \ \ j = 1, 2, ..., n, \text{ при } 0 \le t < \infty.$$

Пусть при $-H^* \le t \le 0$ выполняются условия

$$x_i(t) = \eta_i(t),\ i = 1,2,...,n, \tag{5}$$

где $\eta_i(t),\ i = 1,2,...,n,$ – непрерывные функции.

Будем считать, что при условиях (5) система уравнений (4) имеет установившееся решение $x^*(t) = (x_1^*(t),\cdots,x_n^*(t)),\ t \ge 0.$

Будем исследовать устойчивость установившегося решения $x^*(t)$ при возмущении $x^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0),$ возникшем в момент времени $t_0 = 0$:

$$x_i(0) = x_i^*(0) + x_i^0, i = 1,2,...,n. \tag{6}$$

Исследовать устойчивость будем в пространстве $n$-мерных векторов $R_n\ \ (x = (x_1,\dots,x_n))$ с нормой $\| x \|_2$ .

Введем новые переменные $u_i(t)$ выражением $x_i(t) = x_i^*(t) + u_i(t),$ $i = 1,2,...,n.$

В результате система уравнений (4) принимает вид

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)u_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)u_j(t - h_i(t)),\ i = 1,2,...,n, \tag{7}$$

причем $u_i(t) = 0$ при $-\infty < t < 0.$

Возмущения (6) трансформируются в начальные условия:

$$u_i(t) = 0,\ -\infty < t < 0,\ i = 1,2,...,n;\ u_i(0) = x_i^0,\ i = 1,2,...,n. \tag{8}$$

Исследуем устойчивость тривиального решения системы уравнений (7) при начальных условиях (8).

Пусть $\delta$ – достаточно малое положительное число. Пусть $\| u(0) \| \le \delta,$ $u(0) = (u_1(0),...,u_n(0)).$

Найдем условия, при которых траектория решения задачи Коши (7), (8) при $\| u(0) \| \le \delta$ не покидает шар $B(0,\delta).$

Обозначим через $t_{j,1}^*,\dots,t_{j,k_j}^*$ корни уравнения $h_j(t) = t,\ \ j = 1,2,\dots,n.$ Не ограничивая общности, можно считать, что все корни различные. Расположим их в порядке возрастания $t_{1,1}^* < \cdots < t_{n,k_n} < \infty.$ Не ограничивая общности можно считать, что $0 < t_{11}^*.$

Исследуем устойчивость решения задачи Коши (7)–(8) в промежутке времени $[0,t_{11}^*].$

Здесь нужно рассмотреть в отдельности несколько случаев:

1) в промежутке времени $(0,t_{11}^*)$ $h_j(t) < t,\ \ j = 1,2,\dots,n;$

2) в промежутке времени $(0,t_{11}^*)$ $h_j(t) > t,\ \ j = 1,2,\dots,n;$

3) в промежутке времени $(0, t_{11}^*)$ выполняются как неравенства $h_j(t) < t$, так и неравенства $h_l(t) > t$. Не ограничивая общности, можно считать, что $h_1(t) > t$ и $h_j(t) < t$ при $j \neq 1$.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

***Первый случай.***

Покажем, что при выполнении условий

$$\Lambda(A(t)) + \| B(t) \| \leq -\chi < 0, \quad t \in [0, t_{11}^*), \tag{9}$$

траектория решения задачи Коши (7), (8) не покидает шар $B(0, \delta)$.

Доказательство проведем от противного. Пусть в момент времени $T \in [0, t_{11}^*)$ траектория решения задачи Коши (7), (8) покидает шар $B(0, \delta)$.

При $t \in [T, t_{11}^*)$ уравнение (7) можно записать следующим образом:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(T) u_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(T) u_j(t - h_i(t)) + g_i(t), i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

где

$$g_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \Big( a_{ij}(t) - a_{ij}(T) \Big) u_j(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \Big( b_{ij}(t) - b_{ij}(T) \Big) u_{ij}\left( t - h_i(t) \right), \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

В операторной форме уравнение (10) имеет вид

$$\frac{du(t)}{dt} = A(T) u(t) + B(t, T, u(t), h(t)) + G(t), \tag{11}$$

где

$$A(T) = \{ a_{ij}(T) \}, \; B(t, T, u(t), h(t) = \left( b_1(t, T, u(t), h(t)), \ldots, b_n(t, T, u(t), h(t)) \right)^T,$$

$$G(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))^T, \; b_i(t, T, u(t), h(t)) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(T) u_j(t - h_i(t)), \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Уравнение (11) имеет решение при $t \in [T, t_{11}^*)$

$$u(t) = e^{A(T)(t-T)} u(T) + \int_T^t e^{A(T)(t-s)} B(s, T, u(s), h(s)) ds + \int_T^t e^{A(T)(t-s)} G(s) ds. \tag{12}$$

Переходя в (12) к нормам, имеем

$$\| u(t) \| \leq e^{\Lambda(A(T))(t-T)} \| u(T) \| + \int_T^t e^{\Lambda(A(T))(t-s)} \| B(s, T, u(s), h(s)) \| ds +$$

$$+\int_T^t e^{\Lambda(A(T))(t-s)} \| G(s) \| ds. \qquad (13)$$

Для дальнейшего необходимо оценить $\| B(s,T,u(s),h(s)) \|$. Пусть $T>0$. Нетрудно видеть, что существует промежуток времени $[T,T+\Delta T]$ такой, что

$$\| B(s,T,u(s),h(s)) \|^2 = \sum_{i=1}^n | \sum_{j=1}^n b_{ij}(T) u_j(t-h_i(t)) |^2 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n | b_{ij}(T) |^2 \sum_{j=1}^n | u_j(t-h_i(t)) |^2 < \| u(T) \|^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n | b_{ij}(T) |^2 .$$

Следовательно, существует промежуток времени $[T,T+\Delta_1 T]$, $\Delta_1 T \le \Delta T$ , такой, что

$$\| B(s,T,u(s),h(s)) \|^2 \le \| u(s) \|^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n | b_{ij}(T) |^2 . \qquad (14)$$

Из построения вектор-функции $G(s)$ следует, что для любого как угодно малого $\varepsilon(\varepsilon>0)$ найдется такой промежуток времени $[T,T+\Delta_2 T]$, $\Delta_2 T \le \Delta_1 T$, что

$$\|G(s)\| \le \varepsilon P x(s) P. \qquad (15)$$

Из формул (13)–(15) следует, что

$$\| u(t) \| \le e^{\Lambda(A(T))(t-T)} \| u(T) \| + \int_T^t e^{\Lambda(A(T))(t-s)} (\| B(T) \| + \varepsilon) \| u(s) \| ds, \qquad (16)$$

отсюда стандартными рассуждениями получаем оценку

$$\| u(t) \| \le e^{(\Lambda(A(T)) + \|B(T)\| + \varepsilon)} \| u(T) \| ,$$

из которой следует, что траектория решения задачи Коши (7), (8) не покидает шар $B(0,\delta)$ в момент времени $T$.

Рассмотрим случай, когда $T=0$. В этом случае

$$\| B(s,T,u(s),h(s)) \|^2 \le \sum_{i=1}^n | \sum_{j=1}^n | b_{ij}(T) |^2 \sum_{i=1}^n | u_j(t-h_i(t)) |^2 .$$

Так как по предположению $h_i(t)<t$, $i=1,2,\ldots,n$, $0<t<t_{11}^*$, и $\| u(0) \| = \delta$, то $h_i(0)=0$, $i=1,2,\ldots,n$, и для любого как угодно малого $\varepsilon_1(\varepsilon_1>0)$ найдется промежуток времени $[T,T+\Delta_3 T]$ такой, что

$$\sum_{j=1}^{n} |u_j(t-h_i(t))|^2 = \| u(t-h_i(t)) \|^2 \le (1+\varepsilon) \| u(t) \|^2 .$$

Следовательно,

$$\| B(s,T,u(s),h(s)) \|^2 \le \| B(T) \|^2 \ (1+\varepsilon_1) \| u(t) \|^2 .$$

Подставляя (15) и это неравенство в (13) и проводя стандартные преобразования, имеем

$$\| u(t) \| \le \exp\{(\Lambda(A(0)) + \| B(0) \| + \varepsilon_2)t\} \| u(0) \|,$$

$$t \in [0, \Delta_3 T], \text{ где } \varepsilon_2 = \| B(0) \| (1+\varepsilon_1) + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что при выполнении неравенства (9) траектория решения задачи Коши (7), (8) не покидает шар $B(0,\delta)$.

***Рассмотрим второй случай.*** В этом случае система дифференциальных уравнений (7) имеет вид

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t) u_j(t), \tag{17}$$

и ее устойчивость при $t \in [0, t_{11}^*]$ исследуется стандартными методами [1, 2, 5].

В результате убеждаемся, что при выполнении условия

$$\Lambda(A(t)) \le -\chi < 0, t \in [0, t_{11}^*) \tag{18}$$

траектория решения задачи Коши (7), (8) не покидает шар $B(0,\delta)$.

***Рассмотрим третий случай.*** В этом случае система уравнений (7) имеет вид

$$\frac{du_1(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t) u_j(t),$$

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t) u_j(t) + \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(t) u_j(t-h_i(t)), \ i = 2, \ldots, n. \tag{19}$$

В операторном виде система уравнений (19) имеет вид

$$\frac{du(t)}{dt} = A(T)u(t) + B^-(t,T,u(t),h(t)) + G(t), \tag{20}$$

где

$$B^-(t,T,u(t),h(t)) = \left( b_1^-(t,T,u(t),h(t)), \ldots, b_n^-(t,T,u(t),h(t)) \right)^T ,$$

$$b_1^-\left(t,T,u(t),h(t)\right) \equiv 0, \ \ b_i^-(t,T,u(t),h(t)) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(T) u_j(t-h_i(t)), \ \ i = 2,3,\ldots,n.$$

Повторяя рассуждения, проведенные при исследовании первого случая, убеждаемся, что при выполнении условия

$$\Lambda(A(t)) + \| B^{-}(t) \| \le -\chi < 0,\ t \in [0, t_{11}^{*}), \tag{21}$$

траектория решения задачи Коши (8), (19) не покидает шар $B(0,\delta)$. Здесь $B^{-}(t) = \{b_{ij}^{-}(t)\}$, $b_{1j}^{-}(t) = 0$, $j = 1,2,\dots,n$, $b_{ij}^{-}(t) = b_{ij}(t)$, $i = 2,3,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,n$.

Анализируя неравенства (8), (18), (21), убеждаемся в том, что при выполнении условий (8) траектория решения задачи Коши (7)–(9) не покидает шар $B(0,\delta)$ при $t \in [0, t_{11}^{*}]$.

**Замечание**. Сопоставляя проведенные выше рассуждения и результаты работ [2, 5], можно показать, что при $t \in [0, t_{11}^{*}]$ справедливо неравенство

$$\| u(t) \| \le \exp\{(\Lambda(A(t)) + \| B(t) \|)t/2\} \| x(0) \| \le \exp\{(\Lambda(A(t)) + \| B(t) \|)t/2\}\delta.$$

Рассмотрим интервал времени $[t_{11}^{*}, t_{12}^{*}]$. Как и выше, в этом интервале нужно рассмотреть три случая:

1) в промежутке времени $(t_{11}^{*}, t_{12}^{*})$ выполняются неравенства $h_i(t) > t$, $i = 1,2,\dots,n$;

2) в промежутке времени $(t_{11}^{*}, t_{12}^{*})$ выполняются неравенства $h_i(t) < t$, $i = 1,2,\dots,n$;

3) в промежутке времени $(t_{11}^{*}, t_{12}^{*})$ имеют место как неравенства $h_j(t) > t$, так и неравенства $h_i(t) < t$. Не ограничивая общности, ниже будем считать, что $h_1(t) < t$ и $h_j(t) > t$ при $j \ne 1$.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

***Первый случай.***

В этом случае система уравнений (8) имеет вид

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)u_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)u_j(t - h_i(t)),\ i = 1,2,\dots,n. \tag{22}$$

Исследуем траекторию решения уравнения (22) при начальном условии

$$u_i(t)|_{t=t_{11}^{*}} = u_i(t_{11}^{*}). \tag{23}$$

Выше было показано, $\| u_i(t) \| \le \delta$, $i = 1,2,\dots,n$, при $0 \le t \le t_{11}^{*}$, и, кроме того, $\| u_i(t) \| < \delta$, $i = 1,2,\dots,n$, при $0 < t \le t_{11}^{*}$.

Покажем, что при выполнении условия

$$\Lambda(A(t)) \le -\chi,\ \chi < 0,\ t \in [t_{11}^{*}, t_{12}^{*}], \tag{24}$$

траектория решения задачи Коши (22), (23) не покидает шар $B(0,\delta)$.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что в момент времени $T$ траектория решения задачи Коши (22), (23) покидает шар $B(0,\delta)$. При $t \in [T, t_{12}^*]$ уравнение (22) можно представить в виде

$$\frac{du}{dt} = A(T)u(t) + B(t, T, u(t), h(t)) + G(t). \quad (25)$$

Здесь использованы обозначения, введенные выше.

Рассмотрим промежуток времени $[T, T+\Delta T]$, $(T+\Delta T < t_{12}^*)$, причем величина $\Delta T$ будет уточнена ниже. На этом промежутке времени $h_i(t) > t$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, $t - h_i(t) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Это означает, что $B(t, T, u(t), h(t)) \equiv 0$ при $t \in [T, T+\Delta T]$ и система уравнений (25) вырождается в систему

$$\frac{du}{dt} = A(T)u(t) + G(t). \quad (26)$$

Системы, подобные системе (26), исследовались в работах [1, 2, 5]. Повторяя приведенные в них рассуждения, можно показать, что при выполнении условия

$$\Lambda(A(t)) \le -\chi < 0, \ \ t \in [t_{11}^*, t_{12}^*], \quad (27)$$

траектория решения задачи Коши (8), (26) не покидает шар $B(0,\delta)$.

Можно, следуя [2, 5], показать, что

$$\|u(t)\| \le e^{\Lambda(A(t))(t - t_{11}^*)/2} \, \| u(t_{11}^*) \|, \ \ t \in [t_{11}^*, t_{12}^*].$$

***Рассмотрим второй случай.***

Пусть $h_j(t) < t$, $t \in (t_{11}^*, t_{12}^*)$.

Покажем, что при выполнении условия

$$\Lambda(A(t)) + \| B(t) \| \le -\chi < 0, \ \ t \in [t_{11}^*, t_{12}^*], \quad (28)$$

траектория решения системы уравнений

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) u_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) u_j(t - h_i(t)) \quad (29)$$

при начальных условиях

$$u_i(t)\big|_{t = t_{11}^*} = u_i(t_{11}^*), \quad (30)$$

где $\| u_i(t_{11}^*) \| \le \delta$, не покидает шар $B(0,\delta)$.

Доказательство проведем от противного. Пусть в момент времени $T$, $t_{11}^* < T < t_{12}^*$, траектория решения задачи Коши (29), (30) покидает шар

$B(0,\delta)$. Систему уравнений (29) при $t \in [T, T+\Delta T]$, $T+\Delta T < t_{12}^*$, можно представить в виде уравнения

$$\frac{du_i(t)}{dt} = A(T)u(t) + B(t,T,u(t),h(t)) + G(t), \tag{31}$$

в котором использованы введенные выше обозначения.

Так как $t_{11}^* < T < T+\Delta T < t_{12}^*$, то $t - h_i(t) > 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, при $t \in [T, T+\Delta T]$.

Рассмотрим норму

$$\|B(t,T,u(t),h(t))\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(T)u_j(t-h_i(t))\right|^2 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}(T)\right|^2 \sum_{j=1}^{n}\left|u_j(t-h_i(t))\right|^2.$$

Так как функции $h_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$, непрерывны, то при $t \in [T, T+\Delta T]$ они достигают своих наибольших значений. Пусть $0 \le a_i \le h_i(t) \le b_i$, $i=1,2,\ldots,n$, $t \in [T, T+\Delta T]$. Пусть $A = \min_{1\le i\le n} a_i$, $B = \max_{1\le i\le n} b_i$.

Функции $u_i(t)$ непрерывны при $t \in [A, B]$. Следовательно, функция

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}(T)\right|^2 \sum_{j=1}^{n}\left|u_j(t-h_i(t))\right|^2$$

непрерывна при $T \le t \le T+\Delta T$ и достигает своего максимального значения в этом сегменте. Пусть максимальное значение достигается при $T^* \in [T, T+\Delta T]$. Очевидно,

$$\sum_{j=1}^{n} | u_j(T^* - h_i(T^*)) |^2 = \| u(T^* - h_i(T^*)) \|^2 \le \| u(T) \|^2,$$

так как точка $t = T$ – первая точка на интервале $(0, T]$, в которой $\| u(t) \| = \delta$.

Следовательно,

$$\psi(t) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | b_{ij}(T) |^2 | u_j(T^* - h_i(T)) |^2 < \| u(T) \|^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | b_{ij}(T) |^2$$

и существует интервал $[T, T+\Delta_1 T]$, $\Delta_1 T \le \Delta T$, в котором

$$\|B(t,T,u(t),h(t))\| \le \|u(t)\| \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}(t)\right|^2\right]^{1/2} = \|u(t)\|\,\|B(t)\|. \tag{32}$$

Нетрудно видеть, что для любого как угодно малого $\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, существует интервал $[T, T+\Delta_2 T]$, $\Delta_2 T \le \Delta_1 T$, в котором

$$\| G(t) \| \le \varepsilon \| u(t) \| . \tag{33}$$

Переходя в (31) к норме и учитывая неравенства (32), (33), имеем при $t \in [T, T+\Delta_2 T]$:

$$\| u(t) \| \le e^{\Lambda(A(T))(t-T)} \| u(T) \| + \int_T^t e^{\Lambda(A(T))(s-T)} \varepsilon \| u(s) \| ds.$$

Отсюда стандартными рассуждениями получаем неравенство

$$\| u(t) \| \le \exp\{(\Lambda(A(T)) + \| B(T) \| + \varepsilon)(t-T)\} \| u(T) \|,$$

справедливое при $t \in [T, T+\Delta_2 T]$.

Из этого неравенства следует, что при $t = T$ траектория решения задачи Коши (29), (30) не покидает шар $B(0,\delta)$ в момент времени $T$.

Более того, повторяя рассуждения, приведенные ранее (и в работах [2, 5]), можно показать, что при $t \in [t_{11}^*, t_{12}^*]$

$$\| u(t) \| \le \exp\{(\Lambda(A(T)) + \| B(T) \| + \varepsilon)(t - t_{11}^*)/2\} \| u(t_{11}^*) \| .$$

Третий случай сводится к двум предыдущим. Его рассмотрение опускается.

Таким образом, показано, что при выполнении неравенства

$$\Lambda(A(t)) + \| B(t) \| \le -\chi < 0, \quad t \in [t_{11}^*, t_{12}^*],$$

в промежутке времени $[t_{11}^*, t_{12}^*]$ траектория решения задачи Коши (7), (8) не покидает шар $B(0,\delta)$ и, более того, выполняется неравенство

$$\| u(t) \| \le \exp\{(\Lambda(A(t)) + \| B(t) \|)(t - t_{11}^*)/2\} \| u(t_{11}^*) \|, \quad t \in [t_{11}^*, t_{12}^*].$$

Продолжая подобные рассуждения в интервалах $[t_{12}^*, t_{13}^*]$, …, $[t_{n,k_n-1}^*, t_{n,k_n}^*]$, $[t_{n,k_n}^*, \infty]$, убеждаемся в справедливости неравенства

$$\| u(t) \| \le \exp\{(\Lambda(A(T)) + \| B(T) \|)t/2\} \| u(0) \|,$$

из которого следует асимптотическая устойчивость решения задачи Коши (7), (8) и, следовательно, задачи Коши (4), (5).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.1.** Пусть функции $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $h_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны при $t \in [0, \infty)$. Пусть выполняется неравенство

$$\Lambda(A(t)) + \| B(t) \| \le -\chi < 0, t \in [0, \infty).$$

Тогда установившееся решение системы уравнений (4) асимптотически устойчиво в евклидовой метрике.

## 2. Линейные уравнения. Возмущенные начальные условия

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (4) при начальных условиях (5). Как и в разд. 1, будем считать, что задача Коши (4), (5) имеет установившееся решение $x^*(t) = (x_1^*(t),\dots,x_n^*(t)),\ t \ge 0.$

Исследуем устойчивость установившегося решения $x^*(t)$ при возмущении начальных условий вектором $\tilde{\eta}(t) = (\tilde{\eta}_1(t),\dots,\tilde{\eta}_n(t))$ с нормой $\|\tilde{\eta}(t)\| \le \delta,$ где $\delta(\delta > 0)$ – достаточно малое число. Функции $\tilde{\eta}_i(t),\ i = 1,2,\dots,n,$ определены и непрерывны в сегменте $[-H^*,0].$

В результате начальное условие имеет вид

$$\bar{\eta}(t) = (\bar{\eta}_1(t),\dots,\bar{\eta}_n(t)), \tag{34}$$

где $\bar{\eta}_i(t) = \eta_i(t) + \tilde{\eta}_i(t),\ i = 1,2,\dots,n.$

Введем новые переменные $u_i(t) = x_i(t) - x_i^*(t),\ i = 1,2,\dots,n.$

В результате задача Коши (4), (34) примет вид

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)u_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)u_j(t - h_i(t)),\ i = 1,2,\dots,n, \tag{35}$$

$$u_i(t) = \tilde{\eta}_i(t) t \in [-H,0],\ i = 1,2,\dots,n. \tag{36}$$

Исследуем устойчивость задачи Коши (35), (36).

По аналогии с предыдущим разделом обозначим через $t_{1,1}^* < t_{1,2}^* < \dots < t_{n,k_n}^*$ корни уравнений $h_i(t) = t,\ i = 1,2,\dots,n.$

Рассмотрим сегмент $[0,t_{11}^*].$ Как и в разд. 1, необходимо рассматривать три случая:

1) в промежутке времени $(0,t_{11}^*)$ выполняются неравенства $h_j(t) < t,$ $j = 1,2,\dots,n;$

2) в промежутке времени $(0,t_{11}^*)$ выполняются неравенства $h_j(t) > t,$ $j = 1,2,\dots,n;$

3) в промежутке времени $(0,t_{11}^*)$ выполняются как неравенства $h_j(t) < t,$ так и неравенства $h_i(t) > t.$ Для определенности будем считать, что $h_1(t) > t$ и $h_j(t) < t$ при $j \ne 1.$

***Исследование первого случая*** ничем не отличается от аналогичного исследования, проведенного в предыдущем разделе.

Следовательно, при выполнении условия

$$\Lambda(A(t)) + \|B(t)\| \le -\chi < 0,\ t \in [0,t_{11}^*], \tag{37}$$

траектория решения задачи Коши (35), (36) не покидает шар $B(0,\delta)$ и, более того,

$$\|u(t)\| \le \exp\{(\Lambda(A(t)) + \|B(t)\|)t/2\}\|u(0)\|,\ t \in [0,t_{11}^*]. \tag{38}$$

***Рассмотрим второй случай.***

В этом случае система уравнений (35), (36) имеет вид

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)u_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\tilde{\eta}_j(t - h_i(t)),\ i = 1,2,\ldots,n. \tag{39}$$

Покажем, что при выполнении условий (37) траектория решения задачи Коши (36), (38) не покидает шар $B(0,\delta)$.

Доказательство проведем от противного. Пусть в момент времени $T$ траектория решения задачи Коши (36), (38) покидает шар $B(0,\delta)$. Уравнение (39) при $t \in [T, t_{11}^*]$ можно записать в следующем виде:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = A(T)u(t) + B\left(t, T, \tilde{\eta}(t), h(t)\right) + G(t),$$

где все обозначения очевидны.

По аналогии с предыдущим разделом оценим $\|B(t,T,\tilde{\eta}(t),h(t))\|$. Очевидно, при $t - h_j(t) \le 0, j = 1,\ldots,n,$

$$\|B(t,T,\tilde{\eta}(t),h(t))\|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}(T)|^2 \sum_{j=1}^{n} |\tilde{\eta}_j(t - h_i(t))|^2 \le$$

$$\le \| B(T)\|^2 \delta^2 = \| B(T)\|^2 \| u(T)\|^2 .$$

Из этого неравенства следует, что для любого как угодно малого $\varepsilon_4 (\varepsilon_4 > 0)$ найдется такой промежуток времени $[T, T + \Delta_4 T]$, в течение которого $\| u(T)\| \le (1+\varepsilon_4)\| u(t)\|$ и $t - h_j(t) \le 0,\ \ j = 1,2,\ldots,n.$ Следовательно, при $t \in [T, T + \Delta_4 T]$

$$\| B(t,T,\tilde{\eta}(t),h(t))\| \le (1+\varepsilon_4)\| B(T)\| \| u(t)\| .$$

Повторяя рассуждения, проведенные в предыдущем разделе, убеждаемся в том, что при выполнении условий (37) траектория решения задачи Коши (35), (36) не покидает шар $B(0,\delta)$ и выполняется неравенство (38).

***Третий случай исследуется по аналогии с предыдущими.***

Аналогично исследуется устойчивость на интервалах $[t_{11}^*, t_{12}^*]$, …, $[t_{n,n_k-1}^*, t_{n,n_k}^*]$, $[t_{n,n_k}^*, \infty)$.

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

**Теорема 2.1.** Пусть функции $a_{ij}(t)$, $b_{ij(t)}$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, $h_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,n$, непрерывны при $t \in [0,\infty)$. Пусть выполнено условие

$$\Lambda(A(t)) + \| B(t)\|_2 \le -\chi < 0,\ \ t \in [0,\infty].$$

Тогда установившееся решение задачи Коши (4), (34) асимптотически устойчиво в евклидовой метрике.

### *Библиографический список*

1. **Бойков И. В.** Достаточные условия устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями, зависящими от времени. Часть I. Линейные уравнения / И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 4 (48). – С. 3–19.
2. **Бойков, И. В.** Устойчивость установившихся решений систем нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздываниями / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 435–457.
3. **Далецкий, Ю. Л.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – Москва : Наука, 1970.
4. **Деккер, К.** Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. – Москва : Мир, 1988.
5. **Бойков, И. В.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2008. – 244 с.

### *References*

1. Boykov I. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2018, no. 4 (48), pp. 3–19. [In Russian]
2. Boykov I. V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2018, vol. 54, no. 4, pp. 435–457. [In Russian]
3. Daletskiy Yu. L., Kreyn M. G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of solutions of differential equations in a Banach space]. Moscow: Nauka, 1970. [In Russian]
4. Dekker K., Verver Ya.*Ustoychivost' metodov Runge-Kutty dlya zhestkikh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy* [Stability of Runge-Kutta methods for rigid nonlinear differential equations]. Moscow: Mir, 1988. [In Russian]
5. Boykov I. V. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy* [Stability of solutions of differential equations]. Penza: Izd-vo PGU, 2008, 244 p. [In Russian]



***Бойков Илья Владимирович***
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

***Boykov Il'ya Vladimirovich***
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)



**Образец цитирования:**

Бойков, И. В. Достаточные условия устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями, зависящими от времени. Часть II. Линейные уравнения / И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 1 (49). – С. 63–77. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-1-7.